Riassunto. In questa nota presentiamo un teorema di tipo Liouville per operatori ipoellittici del secondo ordine in $\mathbb{R}^N$, invarianti rispetto alle dilatazioni e alle traslazioni a sinistra di un gruppo di Lie omogeneo, stratificato e nilpotente. La dimostrazione è del tutto elementare, e si basa sull'uso di formule di rappresentazione che generalizzano, da un lato, la classica formula di media di Gauss per le funzioni armoniche, dall'altro i classici operatori di regolarizzazione di Friedrich

Abstract. We show some Liouville-type theorems for real sub-lapalcians. The proof is quite elementary and relies on representation formulas involving mean value operators and Friedrichs mollifiers.

UN TEOREMA DI TIPO LIOUVILLE PER SUB-LAPLACIANI

E. LANCONELLI

Risultati ottenuti in collaborazione con A. Bonfiglioli.

1. Il caso modello: l'operatore di Laplace. Il nostro risultato, nel caso dell'operatore di Laplace, si formula nel modo seguente.

TEOREMA 1. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\Delta u = p \text{ e } u \geq q \quad in \quad \mathbb{R}^N,$$

ove p e q sono polinomi. Allora u è un polinomio. Inoltre

$$grado\ u \leq \max\{2 + grado\ p, grado\ q\}$$

Questo teorema contiene come caso particolare la seguente generalizzazione della classica proprietà di Liouville delle funzioni armoniche.

COROLLARIO 2. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\Delta u = k \quad in\ \mathbb{R}^N,$$

ove k è costante. Supponiamo che esista $C > 0$ tale che

$$u(x) \geq -C\,(1 + |x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Allora

$$u(x) = a + \langle \alpha, x\rangle + \langle Ax, x\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$ e A matrice $N \times N$ tale che $2\,trA = k$. In particolare se $k = C = 0$ allora $u \equiv a$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1 u è un polinomio di grado ≤ 2 che può quindi scriversi come in (1.1). Di conseguenza

$$k = \Delta u(x) = \Delta(\langle Ax, x\rangle) = 2\,\mathrm{tr}A.$$

In particolare, se $u \geq 0$ e $k = 0$, dovrà essere $A \geq 0$ e $\mathrm{tr}A = 0$. Quindi $A = 0$. Dalla positività di u segue ora che anche $\alpha = 0$.

Il Teorema 1 è conseguenza immediata dei due lemmi seguenti.

LEMMA 1.1. *Se u verifica le ipotesi del Teorema 1 allora*

$$u(x) = O(|x|^n) \quad per \quad |x| \longrightarrow \infty \tag{1.2}$$

con

$$n = max\{2 + grado\ p, grado\ q\}.$$

LEMMA 1.2. *Se $u(x) = O(|x|^n)$ per $|x| \longrightarrow \infty$ e se Δu è un polinomio, allora u è un polinomio.*

Dimostreremo i Lemmi 1.1 e 1.2 utilizzando la seguente formula di rappresentazione per funzioni di classe C^2 :

$$u(x) = M_r(u)(x) - N_r(\Delta u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, r > 0, \tag{1.3}$$

dove

$$M_r(u)(x) = \fint_{D(x,r)} u(y)\,dy,$$

$$N_r(w)(x) = \frac{N}{r^N}\int_0^r \rho^N \left(\int_{D(0,\rho)} w(y)\,(\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho))\,dy \right) d\rho,$$

$$D(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N / |x-y| < r\}$$

e $\Gamma(x) = \Gamma(|x|)$ è la soluzione fondamentale di $-\Delta$ con polo in 0.

Se $\Delta u = 0$ allora $N_r(\Delta u) = 0$ e la (1.3) diventa la classica formula di media di Gauss per le funzioni armoniche.

Se $\Delta u = p$ e p è un polinomio di grado m allora

$$\begin{aligned} N_r(\Delta u)(x) &= N_r(p)(x) \\ &= \frac{N}{r^N}\int_0^r \rho^N \left(\int_{D(0,\rho)} (\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho)) \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha p)(x)(x-y)\,dy \right) d\rho, \end{aligned}$$

e quindi

$$N_r(\Delta u)(x) = \sum_{|\alpha|\le m} p^{(\alpha)}(x)\, r^{|\alpha|+2}, \tag{1.4}$$

ove $p^{(\alpha)}(x) = C_{\alpha,N}\,(D^\alpha p)(x)$ e

$$C_{\alpha,N} = \frac{N}{\alpha!(N+2)} \int_{D(0,r)} z^\alpha(\Gamma(z) - \Gamma(1))\,dz.$$

Pertanto, se il laplaciano di u è un polinomio p di grado m,

$$u(x) = M_r(u)(x) - \sum_{|\alpha|\le m} p^{(\alpha)}(x)\, r^{|\alpha|+2}, \tag{1.5}$$

Sia ora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con supp $\phi \subset]0,1[$ e $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Posto $\phi_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{r}{\varepsilon})$, moltiplichiamo entrambi i membri di (1.5) per $\phi_\varepsilon(r)$ e integriamo in r. Si ottiene

$$u(x) = \int_0^\infty \phi_\varepsilon(r) M_r(u)(x)dr - \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha(\phi) p^{(\alpha)}(x)\, \varepsilon^{|\alpha|+2},$$

ove $C_\alpha(\phi) = \int_0^\infty r^{|\alpha|+2}\phi(r)dr$.

D'altra parte, sostituendo a M_r la sua espressione, dopo uno scambio di integrazione si ottiene

$$\int_0^\infty \phi_\varepsilon(r)M_r(u)(x)dr = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy$$

ove $\Phi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-N}\Phi(\frac{z}{\varepsilon})$ e

$$\Phi(z) = \frac{1}{\omega_N}\int_{|z|}^\infty \frac{\phi(r)}{r^N}dr \quad .$$

Osserviamo esplicitamente che Φ è una funzione di classe C^∞ in $\mathbb{R}^N$, con supporto compatto e integrale uguale a 1.

In definitiva abbiamo:

$$u(x) = u * \Phi(x) - \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha(\phi)p^{(\alpha)}(x)\,\varepsilon^{|\alpha|+2}, \tag{1.6}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.1. Sostituendo u con $u - p$ possiamo supporre $u \ge 0$. Sotto questa ipotesi occorre dimostrare la (1.2) con $r = 2 + m$, ove m è il grado di p. Prendendo $r = |x|$ nella (1.5), si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(M_{|x|}u\right)(x) - \sum_{|\alpha|\le m} p^{(\alpha)}(x)|x|^{|\alpha|+2} \\ &\le 2^N\left(M_{2|x|}u\right)(0) + \sum_{|\alpha|\le m} |p^{(\alpha)}(x)||x|^{|\alpha|+2} \\ &= 2^N\left(u(0) + \sum_{|\alpha|\le m} 2^{|\alpha|+2}|p^{(\alpha)}(0)||x|^{|\alpha|+2}\right) + \sum_{|\alpha|\le m} |p^{(\alpha)}(x)||x|^{|\alpha|+2}. \end{aligned}$$

Da questo segue l'asserto in quanto $p(\alpha)$ è un polinomio di grado $m - |\alpha|$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.2. Utilizziamo la formula (1.6). Poiché il secondo termine al suo secondo membro è un polinomio in x di grado $\le m$, per ogni multi–indice β di altezza $> m$, si ha

$$\begin{aligned} D^\beta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(y)D_x^\beta\Phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{dy}{\varepsilon^N} \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^N} u(y)(D^\beta\Phi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{dy}{\varepsilon^{N+|\beta|}} \\ &= \frac{(-1)^{|\beta|}}{\varepsilon^{|\beta|}}\int_{D(0,1)} u(x-\varepsilon y)(D^\beta\Phi)(z)dz. \end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo $u(y) = O(|y|^n)$ per $|y| \to \infty$,

$$|D^\beta u(x)| \leq C(\beta, \Phi) \frac{1 + (|x| + \varepsilon)^n}{\varepsilon^{|\beta|}}.$$

Da questa, se $|\beta| > n$, per $\varepsilon \to \infty$, si ottiene $D^\beta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Quindi u è un polinomio (di grado $\leq max\{m, n\}$).

2. Il caso dei sub-laplaciani. In $\mathbb{R}^N$ consideriamo l'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 \tag{2.1}$$

dove gli X_j sono operatori differenziali del primo ordine verificanti la condizione di Hörmander di ipoellitticità

$$\text{rank Lie } [X_1, \ldots, X_p] = N \tag{2.2}$$

Supponiamo che $\mathcal{L}$ possa scriversi in forma di divergenza, i.e.

$$\mathcal{L}u(x) = \text{div}[A(x) \cdot \nabla u(x)] \tag{2.3}$$

dove $A(x)$ è una matrice $N \times N$ semi–definita positiva.
Supponiamo inoltre che $\mathbb{R}^N$ si possa munire di una struttura di gruppo di Lie omogeneo $(\mathbb{R}^N, \circ)$, nilpotente e stratificato, e tale che : (i) i campi X_j siano invarianti per le traslazioni a sinistra del gruppo; (ii) il sistema $\{X_1, \ldots, X_m\}$ sia una base del primo strato dell'algebra di Lie di $(\mathbb{R}^N, \circ)$.
Sotto queste ipotesi l'operatore $\mathcal{L}$ si chiama *sub-laplaciano* (o *laplaciano sub-ellittico*) sul gruppo $(\mathbb{R}^N, \circ)$. Poichè quest'ultimo è omogeneo, esiste una famiglia di dilatazioni $\{\delta_r\}_r$ tali che

$$\delta_r(x \circ y) = (\delta_r x) \circ (\delta_r y) \quad \forall r > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Le dilatazioni δ_r operano su $\mathbb{R}^N$ nel modo seguente:

$$\delta_r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) \mapsto \delta_r(x) = (r\, x^{(1)}, r^2\, x^{(2)} \ldots, r^m\, x^{(m)})$$

ove $r > 0$, m è un intero positivo chiamato *passo* del gruppo e, per ogni $j = 1, \ldots, m$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}$ con N_j tale che $N = \sum_{j=1}^m N_j$. Il numero intero positivo

$$Q := \sum_{j=1}^{m} j\, N_j$$

è chiamato *dimensione omogenea* di $(\mathbb{R}^N, \circ)$.
Gli operatori differenziali X_j sono invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra del gruppo, e sono omogenei di grado uno rispetto alle dilatazioni δ_r.
La misura di Lebesgue è invariante per le traslazioni a destra e a sinistra di

$(\mathbb{R}^N, \circ)$
Grazie ad un notevole risultato di Gallardo [2], ad ogni sub-laplaciano $\mathcal{L}$ si può associare una norma omogenea $\|\cdot\|$ che consente di scrivere la soluzione fondamentale Γ di $\mathcal{L}$ nella forma seguente:

$$\Gamma(x,y) = C_Q \|x^{-1} \circ y\|^{2-Q} \tag{2.4}$$

ove C_Q è un'opportuna costante positiva. Ricordiamo che una norma omogenea su $\mathbb{R}^N$ è una funzione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$$

con le seguenti proprietà

$$\begin{array}{ll} (i) & \|\cdot\| \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}^N) \\ (ii) & \|\delta_r(x)\| = r\|x\| \quad \forall r > 0 \\ (iii) & \| x^{-1} \| = \| x \| \\ (iv) & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

Esempi. Il classico operatore di Laplace è un sub–laplaciano rispetto al gruppo euclideo.
Il laplaciano di Kohn in $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} := \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$$

con $X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t$ e $Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$, é un sub-laplaciano sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}_n$.
Un altro esempio di sub-laplaciano è il seguente

$$\mathcal{L} = \partial_{x_1}^2 + (x_1\partial_{x_2} + \partial x_3)^2. \tag{2.5}$$

La struttura di gruppo omogeneo relativa a questo operatore è la stessa dell'operatore di Kolmogorov determinata in [LP].

Sub-laplaciani in dimensioni arbitrariamente elevate si possono costruire a partire da un generico operatore somma di quadrati di Hörmander mediante il cosiddetto procedimento di *lifting* di Rothschild e Stein. L'operatore $\mathcal{L}$ in (2.5) si ottiene precisamente con questo metodo a partire dall'operatore di Grushin

$$\partial_{x_1}^2 + (x_1\partial_{x_2})^2.$$

Questo operatore, pur verificando l'ipotesi di ipoellitticità di Hörmander, *non* è un sub-laplaciano in $\mathbb{R}^2$.

Una funzione $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice δ_r-omogenea di grado m se

$$u(\delta_r x) = r^m u(x)$$

per ogni $r > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.
Se indichiamo con $m(i)$ il δ_r-grado della funzione $(x_1, \ldots, x_N) \to x_i$, il δ_r-grado della funzione $(x_1, \ldots, x_N) \to x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}$, è

$$|(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)|_{\mathcal{L}} := \alpha_1 m(1) + \ldots + \alpha_N m(N).$$

Infine, se $p(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$ è una funzione polinomiale, poniamo

$$\text{grado}_{\mathcal{L}}(p) = \max_\alpha |\alpha|_{\mathcal{L}}.$$

Poichè $\mathcal{L}$ è δ_r-omogeneo di grado 2, e poichè i suoi coefficienti sono funzioni polinomiali, se u è un polinomio di $\mathcal{L}$-grado $m + 2$, allora $\mathcal{L}u$ è un polinomio di $\mathcal{L}$-grado m. Il nostro teorema di tipo Liouville afferma che vale anche il viceversa, purchè u sia dominata dal basso da un polinimio.

TEOREMA 3. *Sia* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\mathcal{L}u = p \ \text{e} \ u \geq q \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N,$$

ove p *e* q *sono polinomi. Allora* u *è un polinomio. Inoltre*

$$\text{grado}_{\mathcal{L}} u \leq \max\{2 + \text{grado}_{\mathcal{L}} p, \text{grado}_{\mathcal{L}} q\}$$

La dimostrazione di questo teorema si ottiene con la stessa tecnica applicata nel caso di $\mathcal{L} = \Delta$, utilizzando una formula di rappresentazione per le soluzioni di $\mathcal{L}u = p$ analoga alla (1.6). Il punto di partenza è la seguente formula di media sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$: per ogni funzione reale u di classe C^2 su $\mathbb{R}^N$ risulta

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_{\Gamma(x,y)=1/\rho} u(y) \frac{A(y)\nabla_y\Gamma(x,y) \bullet \nabla_y\Gamma(x,y)}{|\nabla_y\Gamma(x,y)|} dH_{N-1}(y) \\ &- \int_{\Gamma(x,y)>1/\rho} \mathcal{L}u(y) \cdot \left(\Gamma(x,y) - \frac{1}{\rho}\right) dy \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri per ρ^n, con $n \neq -1$, e poi integriamo in $\rho \in [r/2, r]$, otteniamo

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{n+1}{r^{n+1}} \Bigg\{ &\int_{2/r>\Gamma(x,y)>1/r} u(y) \frac{A(y)\nabla_y\Gamma(x,y) \bullet \nabla_y\Gamma(x,y)}{\Gamma^{n+2}(x,y)} dy \\ &- \int_{r/2}^{r} \rho^n \left[\int_{\Gamma(x,y)>1/\rho} \mathcal{L}u(y) \cdot \left(\Gamma(x,y) - \frac{1}{\rho}\right) dy \right] d\rho \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Supponiamo ora $\mathcal{L}u = p$, con p polinomio di $\mathcal{L}$-grado m. Prendiamo una funzione reale $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che supp $\varphi \subseteq [1,2]$, $\varphi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Moltiplicando

entrambi i membri di (2.7) per $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(r))$, e integrando in $r \in [0,\infty]$, dopo alcune semplici trasformazioni, si ottiene:

$$u(x) = u * \Phi_\varepsilon(x) + \sum_{|\alpha|_{\mathcal{L}}} p(\alpha)(x)\,\varepsilon^{2+|\alpha|_{\mathcal{L}}},$$

ove $*$ indica la convoluzione nel senso del gruppo $(\mathbb{R}^N, \circ)$, $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-Q}\Phi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x))$, $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e $p^{(\alpha)}$ è un polinomio avente $\mathcal{L}$ – grado $= m - |\alpha|_{\mathcal{L}}$.

Il Teorema 3 si dimostra utilizzando questa formula, mediante opportuni adattamenti della tecnica usata nel precedente paragrafo.

Confronto con risultati precedenti. Se nel Teorema 3 si sostituisce l'ipotesi $u \geq p$ con la seguente

$$|u| \leq p,$$

si ottiene un risultato dimostrato da Korany e Stanton [3], nel caso del laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg, e da Geller [1] nel caso di un arbitrario operatore ipoellittico e omogeneo, invariante rispetto alle traslazioni a sinistra di un gruppo stratificato e nilpotente. Recentemente Xuebo [5] ha esteso il risultato di Geller agli operatori ipoellittici, omogenei rispetto ad un gruppo di dilatazioni in $\mathbb{R}^N$, non necessariamente invarianti rispetto alle traslazioni di un gruppo di Lie. Tutti questi lavori utilizzano tecniche di analisi funzionale, a volte abbastanza elevate. Il nostro metodo si differenzia da tutti questi, ed è diretto e del tutto elementare. Vogliamo infine citare un elegante risultato di Rothschild [4] sulla equivalenza della ipoellitticità e della proprietà di Liouville per gli operatori invarianti su un gruppo di Lie nilpotente e stratificato.

3. Un esempio di applicazione. Sia $\Delta_{\mathbb{H}_n}$ il laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Nella ricerca delle trasformazioni differenziabili che commutano con $\Delta_{\mathbb{H}_n}$, si è condotti ai seguenti problemi.

(P1) Determinare le funzioni ψ di classe C^2 su $\mathbb{R}^N$ tali che

$$\Delta_{\mathbb{H}_n}\psi = 0, \quad |\nabla_{\mathbb{H}_n}\psi|^2 = 1.$$

(P2) Determinare le funzioni ψ di classe C^2 su $\mathbb{R}^N$ tali che

$$\Delta_{\mathbb{H}_n}\psi = 0, \quad |\nabla_{\mathbb{H}_n}\psi|^2 = |z|^2.$$

Se poniamo $u = \frac{\psi^2}{2}$, da (P1) si trae

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} u = 1, \quad \text{con} \quad u \geq 0$$

mentre da (P2)

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} u = |z|^2, \quad \text{con} \quad u \geq 0.$$

(indichiamo con (z,t) il punto di $\mathbb{R}^{2n+1}$, con $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e $t \in \mathbb{R}$). Per il Teorema 3, nel primo caso u deve essere un polinomio di $\Delta_{\mathbb{H}_n}$-grado ≤ 2, e quindi un polinomio del tipo $u(z,t) = q(z) + \alpha t$, ove q è un polinomio di grado euclideo

2 e α è una costante reale. D'altra parte, dovendo essere $u \geq 0$, dovrà essere $\alpha = 0$. Quindi

$$u(z,t) = q(z).$$

Nel caso del problema (P2), u deve invece essere un polinomio non negativo avente $\Delta_{\mathbf{H}_n}$-grado ≤ 4.

Utilizzando questi risultati si prova agevolmente che le uniche trasformazioni due volte differenziabili che commutano col laplaciano di Kohn, sono le traslazioni a sinistra sul gruppo di Heisenberg, le rotazioni euclidee intorno all'asse t, le simmetrie rispetto all'iperpiano $t = 0$, nonchè, ovviamente, tutte le composizioni di queste trasformazioni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] D. Geller, *Liouville's theorem for homogeneous groups*, Comm.PDE, 15(1983), pp. 1665-1677.

[2] L. Gallardo, *Capacité, mouvement brownien et probleme de l'epine de Lebesgue sur le groups nilpotent, Proc. Oberwolfach Conference on Probability measures on groups*, Lectures Notes in Math.,1981.

[3] A. Korany e N. K. Stanton, *Liouville-type theorem for some complex hypoelliptic operators*, J. Functional An. 60(1985),370-377.

[4] P. Rothschild, *A remark on hypoellipticity of homogeneous invariant differential operators on nilpotent Lie groups*, Comm. PDE, 15(1983), pp. 1679-1682.

[5] L. Xuebo, *Liouville theorem for homogeneous differential operators*, Comm.PDE, v. 22 (1997), pp. 1837-1848.